**Podzielność liczb**

[Arytmetyka – szkoła podstawowa – raczej łatwe – średnio-przydatne]

Cechy podzielności liczb

Czasami przed wykonaniem dzielenia warto upewnić się, czy dzielna podzieli się przez dzielnik bez reszty. Każda liczba ma swoją własność, która mówi nam o tym, czy podzieli się przez daną liczbę bez reszty. Własności te są takie same u każdej liczby. Na przykład sprawdzając, czy 132 podzieli się przez 11 bez reszty, dowiemy się, czy liczba 132 jest podzielna przez 11, czy też nie.

Oto cechy podzielności przez kilka pierwszych liczb:

Przez 1:

Każda liczba jest podzielna przez 1

Wynika to z tego, że 1 jest elementem neutralnym dzielenia, toteż dzieląc dowolną liczbę przez 1, otrzymamy tę liczbę w niezmienionej postaci, a więc bez reszty.

Przez 2:

Śledząc tabliczkę mnożenia zauważamy, że każda liczba pomnożona przez dwa otrzymuje końcówkę 2, 4, 6, 8 lub 0. Stąd też wynika, że

Liczba jest podzielna przez 2, jeżeli jej ostatnia cyfra jest równa zero, dwa, cztery, sześć lub osiem

Liczbę podzielną przez 2 nazywamy **parzystą**, a niepodzielną przez dwa – **nieparzystą**

Przykłady liczb podzielnych przez dwa: 4, 86, 124, 175250, 42, 88

Przez 3:

Liczba jest podzielna przez 3, jeżeli jej suma cyfr jest podzielna przez trzy

Sprawdzając, czy dana liczba jest podzielna przez trzy, dodajemy jej cyfry (sumujemy cyfrę jedności z cyfrą dziesiątek, setek itd.), a następnie sprawdzamy, czy otrzymany wynik jest podzielny przez 3.

Przykłady liczb podzielnych przez trzy: 9, 27, 63, 14631, 876, 111111

Przez 4:

Liczba jest podzielna przez 4, jeżeli liczba utworzona przez jej dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez cztery

Mówiąc prościej: gdy mamy daną liczbę, której podzielność sprawdzamy, oddzielamy (oczywiście w pamięci) jej dwie ostatnie cyfry, a następnie sprawdzamy (polegając na swojej znajomości tabliczki mnożenia), czy liczba, którą otrzymaliśmy, dzieli się przez 4 bez reszty.

Sposób ten wynika stąd, że liczba trzycyfrowa posiada setki, a liczba sto, dwieście, trzysta itd. jest podzielna przez 4. Wystarczy więc sprawdzić, czy pozostała liczba dwucyfrowa podzieli się przez 4.

Przykłady liczb podzielnych przez cztery: 44, 624, 564380, 446972, 57856

Przez 5:

Analizując tabliczkę mnożenia zauważamy, że liczby pomnożone przez 5 przybierają końcówki 0 lub 5. Stąd też:

Liczba jest podzielna przez 5, jeżeli jej ostatnia cyfra jest równa zero lub pięć

Przykłady liczb podzielnych przez pięć: 5, 15, 7860, 829780, 8267565, 11111110

Przez 6:

Ponieważ liczba 6 jest wynikiem działania 23, to liczba podzielna przez 6 musi być także podzielna przez dwa oraz trzy. Tak więc liczba jest podzielna przez 6, jeśli dzieli się przez dwa i trzy, a dokładniej:

Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jej ostatnią cyfrą jest zero, dwa, cztery, sześć lub osiem oraz suma cyfr tej liczby jest podzielna przez trzy

Przykłady liczb podzielnych przez sześć: 72, 4584, 572658, 546450, 7655346

Przez 8:

Podzielność przez osiem działa na podobnej zasadzie, co podzielność przez 4. Ponieważ tysiąc, podobnie jak 2000, 3000, 4000 itd., jest podzielny przez osiem, to:

Liczba jest podzielna przez 8, jeżeli liczba utworzona przez jej trzy ostatnie cyfry jest podzielna przez osiem

Przykłady liczb podzielnych przez osiem: 800, 145408, 897896, 654264

Przez 9:

Liczba jest podzielna przez 9, jeżeli jej suma cyfr jest podzielna przez dziewięć

Przykłady liczb podzielnych przez dziewięć: 81, 666, 9927, 876753, 123456789

Przez 10:

Sprawdzanie podzielności przez 10 jest najprostsze. Oczywiste jest, że:

Liczba jest podzielna przez 10, jeżeli jej ostatnia cyfra jest równa zero

Przykłady liczb podzielnych przez dziesięć: 756530, 67256000, 1355460, 867450

Ważne jest także, że:

Każda liczba jest podzielna przez samą siebie

Wynikiem takiego działania jest 1.

Dzielniki liczby

Zazwyczaj liczba posiada kilka spośród powyższych cech, a więc dzieli się przez kilka liczb. Liczby, przez które dzieli się dana liczba nazywamy **dzielnikami** tej liczby.

Przykładowo sprawdźmy, przez jakie liczby dzieli się 60. Ostatnią cyfrą sześćdziesiątki jest 0, więc dzieli się ona przez dziesięć, pięć i dwa. Suma cyfr tej liczby wynosi 6, a więc jest podzielna przez trzy. Ponieważ jest podzielna jednocześnie przez 3 i 2, dzieli się przez sześć. Ponieważ dzieli się przez 3 i 5,dzieli się jeszcze przez piętnaście. Skoro przez piętnaście, musi dzielić się jeszcze przez cztery (60:15=4). Skoro dzieli się przez 3 i 4, dzieli się także przez 12. Dzieląc 60 przez 2 otrzymujemy 30, więc sześćdziesiąt dzieli się jeszcze przez 30. Tak więc dzielnikami liczby 60 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 i 60.

Przedstawiona metoda opiera się wyłącznie na cechach podzielności. Znajdowanie dzielników liczby może być prostsze: próbujemy podzielić daną liczbę przez kilka różnych liczb, jeśli otrzymamy wynik bez reszty, znajdujemy już dwa dzielniki tej liczby – liczbę przez którą dzieliliśmy oraz wynik dzielenia.

Liczby pierwsze i złożone

Każda liczba dzieli się przez jeden oraz samą siebie. Istnieją liczby, które nie posiadają zupełnie żadnych innych dzielników. Takie liczby nazywamy **liczbami pierwszymi**. Oto przykłady kilku liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 87, 89, 97, 101. Wymienione liczby dzielą się tylko przez 1 i samą siebie.

Wszystkie pozostałe liczby, czyli takie, które posiadają także inne dzielniki, nazywamy **liczbami złożonymi**.

Istnieją dwie liczby, które nie są ani pierwsze, ani złożone. Są to 1 oraz 0, ponieważ nie mieszczą się do definicji liczb pierwszych, a więc tym bardziej złożonych: jedynka dzieli się przez jeden i samą siebie, lecz oba te dzielniki są takie same, posiada więc jeden dzielnik; z kolei zero, mimo że dzieli się przez 1 (a także przez dowolną inną liczbę), nie dzieli się przez samą siebie, ponieważ żadna liczba nie dzieli się przez zero.

**Liczby względnie pierwsze** to kilka takich liczb, które nie posiadają innego wspólnego dzielnika niż 1, czyli największa liczba, przez którą można podzielić każdą z tych liczb, wynosi 1. Żadna z tych liczb nie musi być pierwsza, lecz oczywiście kilka liczb pierwszych jest także względnie pierwszych. Przykłady: 2 i 3; 4 i 5; 13 i 15; 6, 9 i 121; 8 i 225; 1000, 55, 45 i 7; 47, 94 i 95; 87 i 78.

Gdy mówimy o liczbach **parami względnie pierwszych**, mamy na myśli kilka takich liczb, wśród których każde dwie wybrane liczby są względnie pierwsze. O liczbach względnie pierwszych mówimy, kiedy w zbiorze kilku liczb największym dzielnikiem wszystkich liczb jest 1. Jednak wśród takich liczb dwie lub więcej mogą mieć wspólne dzielniki. Przykładowo liczby 14, 21, 84 i 90 są względnie pierwsze, lecz liczby: 14, 21 i 84 posiadają wspólny dzielnik – siedem. Cztery wymienione liczby nie są więc parami względnie pierwsze. Przykłady liczb parami względnie pierwszych: 7, 6 i 4; 12, 35 i 143; 8, 9, 25, 49 i 169; 4 i 5. Jeśli spośród powyższych przykładów wybralibyśmy dowolne dwie liczby, to byłyby one względnie pierwsze.

Rozkład na czynniki pierwsze

Każdą liczbę możemy zapisać w postaci iloczynu co najmniej dwóch czynników, gdzie liczby pierwsze jako iloczyn jedynki i samej siebie. Próbując rozpisać w ten sposób jakąś liczbę złożą, prawdopodobnie wśród zapisanych przez nas czynników któryś z nich moglibyśmy rozpisać w ten sposób jeszcze bardziej. Rozpisując dowolną liczbę tak długo, aż wszystkie otrzymane czynniki będą liczbami pierwszymi, wykonamy rozkład na czynniki pierwsze.

W oficjalny sposób rozkład zaczynamy od podzielenia danej liczby przez jej najmniejszy możliwy dzielnik, będący liczbą pierwszą, a więc prawdopodobnie przez 2, 3, 5, 7 itd. Kolejne wyniki takich działań również dzielimy przez najmniejszy możliwy dzielnik.

Wykonując rozkład zapisujemy liczbę, na której wykonujemy tę operację, po czym rysujemy obok (po prawej stronie tej liczby) pionową kreskę. Po prawej stronie tej kreski, na poziomie rozkładanej liczby, zapisujemy najmniejszy dzielnik pierwszy tej liczby. Następnie po lewej stronie kreski, pod rozkładaną liczbą, zapisujemy wynik dzielenia tej liczby przez zapisany dzielnik. Z otrzymaną liczbą robimy to samo: dzielimy ją przez najmniejszy możliwy dzielnik będący liczbą pierwszą, który zapisujemy po prawej stronie, a wynik po lewej pod spodem. Powtarzamy to tak długo, dopóki nie otrzymamy liczby 1.

Zapewne wydaje się to skomplikowane, dlatego łatwiej będzie przeanalizować przykłady.

Rozkładamy liczbę 120. Zapisujemy ją, a obok rysujemy dosyć długą pionową kreskę.

120 1

Teraz poszukujemy dzielników liczby 120. Ostatnią cyfrą tej liczby jest 0, toteż dzieli się ona przez 2. Ponieważ 2 jest liczbą pierwszą, zapisujemy ją obok 120.

120 2

Teraz wykonujemy dzielenie, gdzie dzielną jest 120, a dzielnikiem 2. Wynik to 60. Zapisujemy go pod 120.

120 2

60 a

Najmniejszym dzielnikiem sześćdziesiątki jest znów 2, które zapisujemy po prawej stronie kreski.

120 2

60 2

Ponownie wykonujemy dzielenie, którego wynikiem jest 30. Zapisujemy je pod spodem, po czym poszukujemy dzielnika. Powtarzamy tę czynność tak długo, dopóki po lewej stronie kreski nieotrzymany jedynki.

120 2

60 2

30 2

15 3

5 5

1

Jedynym i najmniejszym dzielnikiem jedynki jest 1, które moglibyśmy zapisać po prawej stronie kreski. Nie należy tego jednak robić z dwóch przyczyn: wynikiem dzielenia 1:1 jest 1, więc dalsze rozpisywanie nie miałoby sensu; operacja ta nosi nazwę „rozkład na czynniki pierwsze”, a 1 nie jest liczbą pierwszą.

Można się domyślić, że po pomnożeniu wszystkich liczb znajdujących się po prawej stronie kreski, otrzymalibyśmy początkową liczbę – 120.

Rozkład ten pozornie nie ma sensu, lecz ma on swoje zastosowanie w późniejszych etapach matematyki. Jest to dokładne rozłożenie liczby na możliwie najprostsze liczby, elementy całości, których iloczyn daje początkową liczbę.

Przykłady rozkładania na czynniki pierwsze:

1024 2

512 2

256 2

128 2

64 2

32 2

16 2

8 2

2310 2

1155 3

385 5

77 7

11 11

1

3600 2

1800 2

900 2

450 2

225 3

75 3

25 5

5 5

4 2 1

2 2

1

Zadania

1.Sprawdź, czy:

1. 3 jest dzielnikiem 12534624
2. 142 podzieli się przez 13 bez reszty
3. 2,3,4 i 5 należą do zbioru dzielników liczby 90
4. Istnieje liczba, która posiada dokładnie 3 dzielniki
5. Jeśli liczbę, której dzielnikami są (oprócz jej samej) tylko 1, 3, 7 i 11 powiększymy o 15, to możemy otrzymać 247
6. Dzielnikiem liczby parzystej podzielnej przez 7 może być 45

2.Wpisz w puste miejsca takie cyfry, aby liczba:

1. 49 była podzielna przez 15
2. 11była podzielna przez 24
3. 124 była podzielna przez 15 i 6
4. była podzielna przez 6, 20 i 15

3.Sprawdź poprawność i wykryj błędy w wykonanych rozkładach na czynniki pierwsze.

6545 5

1309 7

189 3

63 3

21 3

7 7

1

7644 2

3822 2

1911 3

637 7

91 7

13 13

1

5100 5

1020 5

204 2

102 2

51 51

1

4.Pewna liczba ma iloczyn cyfr równy sumie jej cyfr, która wynosi 350. Ile cyfr ma ta liczba?

Rozwiązania

**1.**a)Liczba jest podzielna przez 3, jeżeli jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Należy więc zsumować cyfry liczby 12534624, po czym sprawdzić podzielność wyniku przez 3.

Liczba 27 jest podzielna przez 3.

Odp.: Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 12534624

b)Do ustalenia podzielności liczby 142 przez 13 najlepiej wykonać dzielenie w słupku:

Odp.: Liczba 142 nie dzieli się przez 13 bez reszty

c)Należy sprawdzić osobno podzielność liczby 90 przez każdą z wymienionych liczb.

Ostatnią cyfrą tej liczby jest 0, więc jest ona podzielna przez 2 i 5. Suma jej cyfr wynosi 9, więc jest podzielna przez 3. Liczba 90 nie jest podzielna przez 4, ponieważ nie dzieli się przez nie bez reszty.

Odp.: Spośród wymienionych liczb tylko 4 nie jest dzielnikiem liczby 90.

d)Każda liczba jest podzielna przez 1 i samą siebie, posiada więc już dwa dzielniki. Należy znaleźć liczbę, która oprócz tego posiada jeszcze 1 dzielnik. Poszukując dzielników liczby nie opierając się na cechach podzielności, wykonujemy dzielenie przez kilka wybranych liczb. Kiedy otrzymamy wynik bez reszty, znajdujemy zwykle dwa dzielniki: liczbę, przez która dzieliliśmy oraz wynik tego dzielenia. Jednak jeśli obie te liczby są takie same, wyjściowa liczba ma będzie miała trzy dzielniki. Jeśli pomnożymy wynik przez liczbę, przez którą dzieliliśmy, otrzymamy początkową liczbę. Tak więc każda liczba, która powstaje z pomnożenia dwóch takich samych liczb pierwszych posiada dokładnie trzy dzielniki.

Odp.: Istnieje nieskończenie wiele liczb, które posiadają dokładnie trzy dzielniki; przykładami są 4, 9, 16, 25, 36…

e)Pytanie można sformułować w inny sposób: „Czy liczba o 15 mniejsza niż 247 może posiadać następujące dzielniki: 1, 3, 7, 11?”. Liczba o 15 mniejsza niż 247 jest równa 232. Wystarczy sprawdzić, czy 232 posiada wymienione dzielniki. Liczba ta jest podzielna przez 11 i 7, lecz jej suma cyfr nie jest podzielna przez 3.

Odp.: Nie istnieje liczba, która spełnia warunki zadania

f)To pytanie można zadać w inny sposób: „Czy istnieje liczba, która jest podzielna jednocześnie przez 2, 7 i 45?”. Jeśli pomnożymy przez siebie wymienione liczby, to z pewnością otrzymamy liczbę podzielną przez nie wszystkie.

Odp.: Dzielnikiem liczby parzystej podzielnej przez 7 może być 45.

**2.**a)Liczba jest podzielna przez 15, jeżeli dzieli się przez 5 i 3. Ostatnią cyfrą tej liczby musi więc być 0 lub 5, a suma jej cyfr musi być podzielna przez 3. Najpierw rozpatrzmy przypadek, w którym ostatnia cyfrą jest 0. Wtedy suma trzech ostatnich cyfr wynosi 13. Aby suma wszystkich cyfr była podzielna przez 3, musimy do 13 dodać odpowiednią liczbę – może to być 2, 5 lub 8. Otrzymaliśmy już 3 rozwiązania: 2490, 5490, 8490. Rozpatrując w podobny sposób przypadek z piątką na końcu, otrzymalibyśmy w sumie następujące rezultaty:

Odp.: Możliwymi rozwiązaniami są: 2490, 5490, 8490, 3495, 6495, 9495

b)Dla wygody rozwiązania zadania, możemy przyjąć, że liczba jest podzielna przez 24, jeśli dzieli się jednocześnie przez 3 i 8, czyli suma jej cyfr jest podzielna przez 3, a liczba utworzona przez jej 3 ostatnie cyfry jest podzielna przez 8. Zastanówmy sie więc, jaką cyfrę możemy wpisać w ostatnie puste pole. Bez wątpienia 80 dzieli się przez 8. Z 11 pozostaje więc 2. Opierając się na swojej znajomości tabliczki mnożenia, wiemy, że jedyną możliwością jest 24. Do ukończenia zadania wystarczy sprawdzić, jaką cyfrę należy wpisać w pierwsze puste pole, aby suma cyfr była podzielna przez 3. Suma cyfr poznanej części liczby wynosi 6, dopisać więc można 3, 6 lub 9.

Odp.: Możliwymi rozwiązaniami są: 3114, 6114, 9114.

c)Liczba jest podzielna przez 15, jeżeli dzieli się przez 5 i 3, a dzieli się przez 6, gdy dzieli się przez 2 i 3. Zatem liczba jest podzielna przez 15 i 6, gdy dzieli się jednocześnie przez 5, 3, 2 i 3, czyli gdy dzieli się przez 2, 3 i 5. Aby była ona podzielna przez 5, ostatnią jej cyfrą musi być 5 lub 0, lecz ponieważ liczba ta musi być parzysta, to jej ostatnią cyfrą jest 0.Suma cyfr poznanej części liczby wynosi 7, toteż w ostatnie puste pole możemy wpisać 2, 5 lub 8.

Odp.: Możliwymi rozwiązaniami są: 12420, 12450, 12480.

d)Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli dzieli się przez 2 i 3, przez 20 jeżeli dzieli się przez 5 i 4, przez 15 jeżeli dzieli się przez 3 i 5.Tak więc poszukiwana liczba musi dzielić się przez 2, 3, 4 i 5. Ponieważ jednak liczba podzielna przez 4 dzieli się także przez 2, nasz warunek jest niewystarczający. Przyjmijmy więc, że nasza liczba musi dzielić się przez 3, 5 i 8. Bez wątpienia liczba podzielna przez 5 i 8 posiada na końcu 0. Musimy więc sprawdzić, jakie liczby postaci 00 są podzielne przez 8. Analizując tabliczkę mnożenia odnajdujemy jedynie dwa wyniki: 40 i 80. Ostatnie, co należy teraz zrobić, to dopisać cyfrę tysięcy, aby liczba była podzielna przez 3. Gdy przedostatnią cyfrą jest 4, możemy dopisać 2, 5 lub 8, a gdy jest nią 8, możemy dopisać 1, 4 lub 7.

Odp.: Możliwymi rozwiązaniami są: 2040, 5040, 8040, 1080, 4080, 7080.

**3.** Oto poprawione rozkłady – pierwszy i trzeci

6545 5

1309 7

187 11

13 13

1

5100 2

2550 2

1275 3

425 5

85 5

17 17

1

W pierwszym rozkładzie wystąpił zwykły błąd rachunkowy – dzielenie 189:3 zostało wykonane źle. Drugi rozkład jest bezbłędny. W trzecim rozkładzie zasadnicza pomyłką jest traktowanie liczby 51 jako pierwszej, ponieważ jest ona wynikiem działania 317. Dzielniki zostały także wypisane w złej kolejności – zamiast dwójki jako pierwsza wystąpiła piątka – nie jest to jednak aż tak istotne, gdyż nie ma dużego wpływu na wynik.

**4.** Na początek należy sprawdzić, jakie cyfry musi mieć dana liczba, aby ich iloczyn był równy 350. W tym cel wykonajmy rozkład na czynniki pierwsze liczby 350:

350 2

175 5

35 5

5 5

1

Wynika z tego, że aby iloczyn cyfr tej liczby był równy 350 muszą się wśród nich znaleźć: 2, 5, 5, 7 i dowolna ilość jedynek, które nie zmienią wyniku. Teraz należy ustalić, ile potrzeba jedynek, aby suma wszystkich cyfr wynosiła 350. Ponieważ suma pewnych cyfr jest równa: 2+5+5+7=19, to potrzeba 350-19=331 jedynek (ponieważ 3501+2+5+5+7=350). Wiadomo więc, że dana liczba posiada 331 jedynek, dwójkę, dwie piątki i siódemkę, czyli razem 335 cyfr.

Odp.: Dana liczba posiada 335 cyfr.